Über die Anwendung einer Klasse von Integralgleichungen für Existenzbeweise in der Potentialtheorie.

Von ROLF NEVANLINNA in Helsinki.

In einigen früheren Arbeiten habe ich die alternierenden Verfahren von SCHWARZ und NEUMANN analysiert und den Zusammenhang dieser wichtigen Methoden mit der Theorie der Integralgleichungen dargelegt. Auf den folgenden Seiten soll eine kurze Synthese dieser Zusammenhänge gemacht werden. Ich werde zeigen, daß die potentialtheoretischen Probleme von Schwarz und Neumann eine einheitliche Formulierung gestatten, was auch implizite durch meine früheren Untersuchungen hervorgegangen ist, und daß die Verschiedenheit der Konvergenzbetrachtungen bei Schwarz und Neumann nur von den verschiedenen Möglichkeiten herrühren, welche bei der Verteilung der Eigenwerte der assoziierten Integralgleichung vorkommen können und die durch die metrischen Verhältnisse der in Betracht kommenden Riemannschen Flächenstücke bedingt sind. Um die einheitliche Behandlung dieser Existenzfragen zu ermöglichen, ist es notwendig, sämtliche in Betracht gezogenen Gebiete oder Riemannschen Flächenstücke F als *offen* (nichtberandet) anzunehmen. Der Fall der *berandeten* Flächen, der besonders für die erste Randwertaufgabe der Potentialtheorie (Problem von SCHWARZ) wichtig ist, wird hierdurch nicht ausgeschlossen, denn dieser Fall entspricht nur der zusätzlichen Voraussetzung, daß die Fläche F als Teilfläche einer umfassenderen Fläche F^* gegeben ist, so daß der ideale Rand von F eine „reelle" Darstellung durch eine Punktmenge auf F^* erhält.

Die Betrachtung offener Flächen bedeutet aber gleichzeitig eine weitgehende Erweiterung der klassischen Problemstellung von SCHWARZ und NEUMANN, für welche die Voraussetzung der Kompaktheit der Flächenstücke F wesentlich war. Diese Verallgemeinerung ist für viele Probleme in der Theorie der offenen Riemannschen Flächen bedeutungsvoll.

Die folgende Darstellung knüpft sich an meine Arbeit „Über die Neumannsche Methode zur Konstruktion von Abelschen Integralen" (*Commentarii Math. Helvetici*, **22** (1949), S. 302—316). Um Wiederholungen zu vermeiden, werde ich wegen Einzelheiten (§ 2, 3) an die Ausführungen jener Untersuchung verweisen.

§ 1. Hilfsbetrachtungen.

1. Jordankomplexe. Es sei F eine abstrakt gegebene offene oder geschlossene Riemannsche Fläche. Auf F sei gegeben eine Punktmenge (α), die einen Komplex (Jordankomplex) von folgender Art bildet:

1. Es ist (α) die Vereinigungsmenge einer Menge von Jordanbögen α auf F (jedes einzelne α ist also topologisches Bild einer abgeschlossenen Parameterstrecke $0 \leqq t \leqq 1$).
2. Jeder innere Punkt eines Bogens α ist äußerer Punkt für alle übrigen Bögen α.
3. Von jedem Endpunkt eines Bogens α gehen genau zwei Bögen α aus.
4. Die Bögen (α) häufen sich nicht im Inneren von F, d. h. für jede kompakte Punktmenge F_0 auf F gilt, daß sie mit höchstens endlich vielen Bögen α Punkte gemeinsam hat.

Aus 4. folgt, daß die Menge der Bögen (α) jedenfalls abzählbar ist; für eine geschlossene Fläche F ist sie sogar endlich (was auch für eine offene Fläche nicht ausgeschlossen ist). Der Komplex α zerfällt in abzählbar viele punktfremde, zusammenhängende Jordanzüge, die auf F entweder geschlossen (Rückkehrschnitte) oder nach beiden Seiten offen (Querschnitte) sind.

2. Jordangebiete. Sei A ein *Gebiet* auf F (d. h. eine zusammenhängende offene Punktmenge) mit folgenden Eigenschaften:

1. A ist ein echtes Teilgebiet von F, und seine Randpunktmenge α ist ein Komplex.
2. In der Umgebung jedes Randpunktes gibt es äußere Punkte von A (d. h. Punkte von F, welche nicht in der Menge $A + \alpha$ enthalten sind).

Aus 2. folgt, daß der Komplex α die Fläche F zerlegt.

Ein Gebiet mit den Eigenschaften 1. und 2. möge kurz *Jordangebiet* heißen.

3. Lösung der Randwertaufgabe für ein Jordangebiet. Sei A ein Jordangebiet auf F. Wir unterscheiden zwei Fälle, jenachdem $A + \alpha$ kompakt oder nichtkompakt ist.

Falls erstens $A + \alpha$ *kompakt* ist, so kann man durch bekannte Methoden das harmonische Maß $\omega(z, \alpha_0)$ eines Teilbogens α_0[1]) von α im Punkte z in Bezug auf A bilden, d. h. diejenige in A eindeutige, beschränkte harmonische Funktion, welche in jedem inneren Punkte des Bogens α_0 stetig und gleich 1 ist, während sie in jedem Punkte des Komplementes $\alpha - \alpha_0$ (falls dieses nicht leer ist) verschwindet[2]). Es ist ω durch diese Bedingungen eindeutig bestimmt.

[1]) D. h., α_0 ist eine zusammenhängende Menge von Punkten α.

[2]) Die Herstellung von ω kann z. B. durch das alternierende Verfahren, kombiniert mit wohlbekannten Konvergenzprozessen gelöst werden. Die Verwendung des alternierenden Verfahrens, welches doch Gegenstand der nachstehenden Untersuchungen ist, bedeutet keinen Zirkel, denn die zur Gewinnung von ω nötigen Schritte können bekanntlich so eingerichtet werden, daß die jeweils vorkommende Randwertaufgabe *elementar* lösbar ist (z. B. durch das Poissonsche Integral).

Nachdem man das Maß ω so (für ein gegebens z und) für jedes „Intervall" α_0 definiert hat, bestätigt man, daß ω eine additive Intervallfunktion ist, und ferner, daß sie eine stetige Funktion der Endpunkte der Intervalle ist. Auf dieser Grundlage kann man also, wenn $f(\zeta)$ als eine stetige Folge von Werten auf α gegeben ist, das Riemannsche Integral

$$u(z) = \int_\alpha f(\zeta)\, d\omega(\zeta, z) \tag{1}$$

bilden und bestätigt leicht, daß es in A harmonisch ist und den vorgegebenen Randwerten f für $z \to \zeta$ zustrebt[3]).

Es ist zu bemerken, daß im vorliegenden Fall

$$\int_\alpha d\omega = 1. \tag{2}$$

4. Falls $A + \alpha$ *nicht kompakt* ist, so läßt sich das harmonische Maß eines Intervalles α_0 auf α definieren durch einen Grenzprozeß, indem man A durch eine Folge $A_1 \subset A_2 \subset \ldots$ von kompakten Jordangebieten $A_n + \alpha_n$ ausschöpft, wobei α_0 ein Teil von α_n sein soll. Die entsprechenden harmonischen Maße bilden eine monoton wachsende Folge und konvergieren gegen eine Grenzfunktion $\omega(z, \alpha_0)$, die folgende Eigenschaften hat:

1. ω ist harmonisch in A;
2. $\omega \to 1$, wenn z gegen einen inneren Punkt von α_0 strebt;
3. ω ist die untere Grenze aller in A positiven Funktionen, welche den Bedingungen 1. und 2. genügen.

Die Überlegungen von Nr. 3 lassen sich nun wiederholen, und man kann die Randwertaufgabe mit einer *stetigen* und *beschränkten* Randbelegung f auf α durch das Integral (1) lösen: Diese Funktion ist harmonisch und beschränkt in A und hat den Randwert $f(\zeta)$ im Punkte ζ des Komplexes α.

5. Maß des idealen Randteiles von A. Die Bedingung der Beschränktheit wurde hier vorausgesetzt, um die Konvergenz des Integrales (1) zu sichern, wozu wegen der jetzt möglichen Nichtkompaktheit von $A + \alpha$ die bloße Stetigkeit von f noch nicht genügt[4]).

Die Frage über die Eindeutigkeit der gestellten Randwertaufgabe kompliziert sich auch wegen der Nichtkompaktheit des Gebietes A. Für diese Frage ist folgende Fallunterscheidung von fundamentaler Bedeutung. Es folgt aus der Konstruktion des harmonischen Maßes, daß $0 < \omega \leq 1$, oder also

$$0 < \int_\alpha d\omega \leq 1 \tag{3}$$

[3]) Es ist ferner möglich, auf α einen Meßbarkeitsbegriff in Bezug auf A und Lebesgue—Stieltjessche Integrale einzuführen.

[4]) Man könnte im folgenden auch nur die absolute Konvergenz von (1) als Voraussetzung einführen. Diese Konvergenz ist für *alle* Aufpunkte z in A gleichzeitig erfüllt oder nicht erfüllt. So würde auch eine Klasse von nichtbeschränkten Funktionen zugelassen sein.

für jedes z in A. Mit Hilfe des Maximumprinzipes sieht man sofort ein, daß *entweder* (2) für alle Punkte in A *oder*

$$0 < \int_\alpha d\omega < 1 \tag{2'}$$

für jedes z in A gilt.

Definiert man das harmonische Maß $\omega(z, \bar{\alpha})$ des *idealen* Randteiles $\bar{\alpha}$ von A durch die Differenz

$$\omega(z, \bar{\alpha}) = 1 - \omega(z, \alpha) = 1 - \int_\alpha d\omega(\zeta, z),$$

so kann man sagen, (2) trete dann und nur dann ein, wenn $\bar{\alpha}$ das harmonische Maß Null in Bezug auf A hat. Falls insbesondere α *kompakt* ist, so umfaßt $\bar{\alpha}$ die ganze ideale Berandung der gegebenen Fläche F, und die Bedingung $\omega(z, \bar{\alpha}) \equiv 0$ spricht dann aus, daß die ganze gegebene Fläche *nullberandet* ist, ein Begriff, der sich in verschiedenen Zusammenhängen für die Theorie der Riemannschen Flächen als wichtig gezeigt hat.

Mit Hilfe des Maximumprinzipes ist es unmittelbar einzusehen, daß das harmonische Maß ω des idealen Randteiles sicher dann Null ist, wenn die Fläche F nullberandet ist, während das Umgekehrte offensichtlich nicht gilt.

6. Die Eindeutigkeit der Lösung der Randwertaufgabe. Ist nun $\bar{\alpha}$ vom Maß Null, so wird das Integral (1) die einzige *beschränkte* Lösung der Randwertaufgabe sein, was wieder mit dem Maximumprinzip leicht zu beweisen ist.

Anders verhält es sich, wenn $\bar{\alpha}$ ein positives harmonisches Maß hat. Dann gibt es eine *unendliche* Menge von beschränkten Lösungen der Aufgabe. In der Tat ist dann das harmonische Maß $\omega(z, \bar{\alpha}) = 1 - \omega(z, \alpha)$ von $\bar{\alpha}$ eine in A *positive* harmonische Funktion mit den Randwerten Null auf α, und der Ausdruck

$$\int_\alpha f\, d\omega + \lambda\, \omega(z, \bar{\alpha}), \tag{4}$$

wo λ eine beliebige Konstante ist, ergibt eine unendliche Schar von Lösungen des Problems.

Es wäre für gewisse allgemeine Fragestellungen wichtig zu entscheiden, ob die Schar (4) *alle* beschränkten Lösungen der Randwertaufgabe umfaßt oder nicht. Im allgemeinen, d. h. bei nicht sehr komplizierten Konfigurationen, gibt es noch weitere beschränkte Lösungen als (4) und deshalb will ich diesen Fall als den *regulären* bezeichnen, während der entgegengesetze *singuläre* Fall dann eintreten würde, wenn (4) die allgemeine Lösung darstellt.

Der singuläre Charakter eines (nichtkompakten) Gebietes bedeutet also, daß jede in A beschränkte, auf α verschwindende eindeutige Potentialfunktion von dem harmonischen Maß $\omega(z, \bar{\alpha})$ des idealen Randteiles *linear abhängt.*

Falls $\omega(z,\bar{\alpha})=0$, so tritt der singuläre Fall immer ein, denn dann ist nach Obigem die Konstante Null die einzige beschränkte Potentialfunktion, die in A eindeutig ist und auf α verschwindet. Ob der singuläre Fall auch für $\omega(z,\bar{\alpha})>0$ eintreten kann, ist eine für gewisse allgemeine Probleme wichtige Frage, die ich allgemein nicht zu entscheiden vermocht habe.*)

Damit die obige Definition des singulären Charakters eines Gebietes A unabhängig von der Wahl der beschränkten Randbelegung sei, muß noch gezeigt werden, daß die in der Definition gegebene Bedingung in Kraft ist für jede solche Belegung f, sobald sie für eine besondere Belegung f_0 gilt. Dies ist auch sofort einzusehen. Denn angenommen, es sei A in Bezug auf f nichtsingulär, so würde es eine Lösung der Randwertaufgabe geben:

$$\int_\alpha f\,d\omega_\alpha+u,$$

wo die Funktion u, die auf α verschwindet, von $\omega(z,\bar{\alpha})$ linear unabhängig ist. Dann würde aber auch

$$\int_\alpha f_0\,d\omega_\alpha+u$$

nicht singulär sein, im Widerspruch zur Voraussetzung.

7. Extremaleigenschaft des Integrales (1). Es möge $f\geqq 0$ sein. Unter dieser Voraussetzung ist das Integral (1) durch die Eigenschaft eindeutig festgelegt, daß es die untere Grenze aller nichtnegativer Potentialfunktionen ist, die auf α gleich f sind. Man beweist dies leicht mit dem Maximumprinzip, angewandt auf ein Näherungsgebiet der Folge A_n, durch welche das harmonische Maß konstruiert wurde. Falls wiederum f *nichtpositiv* ist, so ist das Integral (1) die obere Grenze sämtlicher nichtpositiver eindeutiger Potentialfunktionen, die auf α gleich f sind.

8. Randverhalten der Lösung (4). Um die Sonderstellung der Lösungen (4) im Vergleich mit den Lösungen, die durch Addition einer auf α verschwindenden von $\omega(z,\bar{\alpha})$ linear unabhängigen Potentialfunktion u erhalten wird, (im Falle eines nichtsingulären Gebietes) sei noch Folgendes hervorgehoben.

Der nichtsinguläre Fall setzt als notwendige Bedingung voraus, daß das Maß $\omega(z,\bar{\alpha})$ in A positiv ist. Betrachten wir nun den Fall, wo sowohl die Bedingung $\omega(z,\bar{\alpha})>0$ als auch der nichtsinguläre Charakter von A offensichtlich in Kraft sind:

Wir nehmen an, A sei eingebettet als Teilgebiet in einer Riemannschen Fläche A^*, so daß sowohl α als auch ein gewisser Teil von $\bar{\alpha}$ durch innere

*) *Zusatz bei der Korrektur:* Ich verdanke Herrn Ahlfors die briefliche Mitteilung eines Beispiels, aus dem hervorgeht, daß der singuläre Fall auch für $\omega(z,\bar{\alpha})>0$ tatsächlich vorkommen kann.

Komplexe (α) bzw. ($\overline{\alpha}$) von A^* dargestellt werden. Dann folgt aus der Konstruktion der Lösung (4), daß sie noch auf dem (jetzt „reell" dargestellten) Randteil $\overline{\alpha}$ stetig und konstant gleich λ ist. Für $\lambda = 0$ findet man, daß das Integral (1) auf $\overline{\alpha}$ verschwindet.

Man könnte nun diese wesentliche Eigenschaft der Ausdrücke (4) auch für den allgemeinsten Fall aussprechen, wo A nicht „über $\overline{\alpha}$ fortsetzbar" ist. Durch die Uniformisierung von A mit Hilfe ihrer universellen Überlagerungsfläche A^∞ wird die ganze Randwertaufgabe zurückgeführt auf die Theorie des Poissonschen Integrals und es ergibt sich der konstante Randwert λ der Lösung „fast überall" auf dem idealen Randteil $\overline{\alpha}$. Diese Eigenschaft, die das anschauliche Verständnis der nachfolgenden nicht ganz leicht begreiflichen Betrachtungen erleichtert, werden wir im Folgenden nicht benützen[5]).

§ 2. Das Schwarz—Neumannsche Problem.

9. Es seien nun gegeben zwei Jordangebiete A und B auf der Fläche F, welche zusammen F überdecken ($A+B=F$), so daß die Randkomplexe α und β von A und B punktfremd sind. Der nichtleere (offene) Durchschnitt AB besteht aus einem oder mehreren, eventuell (abzählbar) unendlich vielen Jordangebieten, die nebst ihren Randkomplexen, paarweise punktfremd sind. Der Rand α verläuft in B, der Rand β in A. Die Vereinigungsmenge $\alpha+\beta$ ist Randkomplex von AB.

Seien noch A_0 und B_0 zwei Gebiete der Fläche F, welche die Durchschnittsmenge AB enthalten und so beschaffen sind, daß beide Durchschnitte AA_0 und BB_0 zusammenhängend sind. (Nichts hindert, daß $A_0 \equiv B_0$ wäre. Falls schon AB zusammenhängend ist, so könnte sogar $A_0 \equiv B_0 = AB$ sein.)

Im Gebiet AA_0 sei gegeben eine eindeutige harmonische Funktion a, die in jedem Punkt des Komplexes $\alpha+\beta$ stetig ist, und entsprechend im Gebiete BB_0 eine eindeutige harmonische Funktion b, welche ebenfalls auf $\alpha+\beta$ stetig ist. Über die Fortsetzbarkeit von a außerhalb A_0 in A bzw. von b außerhalb B_0 in B werden keine Voraussetzungen gemacht, es sei aber hervorgehoben, daß ein für gewisse Anwendungen wichtiger Fall derjenige ist, wo a in ganz A (oder b in ganz B) als eine eindeutige reguläre Potentialfunktion existiert.

10. Problem. *Es soll eine in A_0+B_0 eindeutige reguläre Potentialfunktion f konstruiert werden, so daß die Funktion $f-a$ in A und die Funktion $f-b$ in B als eindeutige und beschränkte Funktionen harmonisch fortsetzbar sind*[6]).

Für das Folgende ist es wichtig zu bemerken, daß wenn f eine Lösung des Problems ist, sie auch dasjenige Problem löst, zu welchem man kommt,

---

[5]) Vgl. meine Arbeit: Über die Lösbarkeit des Dirichletschen Problems für eine Riemannsche Fläche, *Göttinger Nachrichten*, (2) **1** (1939), S. 181—193.

[6]) Vgl. meine anfangs zitierte Arbeit.

wenn man zu a eine in A eindeutige, reguläre, beschränkte Potentialfunktion a_0 addiert, die auf α stetig ist. Entsprechendes gilt, wenn man b um eine in B eindeutige, beschränkte und reguläre, auf β stetige Potentialfunktion b_0 vermehrt. Es liegt also in der Natur des Problems, daß die Funktionen a und b nur modulo solche Funktionen als gegeben vorauszusetzen sind. Von dieser Freiheit in der Wahl von a und b soll bald Gebrauch gemacht werden.

11. Allgemeine Lösung des Problems. Falls f_1 und f_2 zwei Lösungen des Problems sind, so ist die Differenz $u = f_1 - f_2$, welche in $A_0 + B_0$ eindeutig und beschränkt ist, sowohl nach A wie nach B als eine eindeutige beschränkte Funktion harmonisch fortsetzbar. Es ist also u auf der ganzen Fläche F eindeutig, harmonisch und beschränkt. Umgekehrt ergibt die Addition einer solchen Funktion zu einer gegebenen Lösung f wieder eine Lösung und es gilt somit:

Die allgemeine Lösung des Problems ist durch den Ausdruck

$$f = f_0 + u \tag{5}$$

bestimmt, wo f_0 eine partikuläre Lösung ist und u eine beliebige auf F eindeutige, beschränkte, harmonische Funktion ist.

Die Menge solcher Funktionen u soll kurz die „Klasse E" heißen.

Das Problem ist so zurückgeführt auf: 1. Bestimmung einer Partikulärlösung, 2. Bestimmung der Klasse E.

12. Die Klasse E. Ich betrachte die lineare Mannigfaltigkeit der Differentiale du der Klasse E. Falls diese Mannigfaltigkeit sich auf $du \equiv 0$ reduziert, so sage ich, der ideale Rand γ der Fläche F habe das Maß Null in Bezug auf die Klasse E,[7])

$$\text{mes}\,\gamma = 0 \ (E) \tag{6}$$

(Ich spreche von einem „Rand γ" auch für eine geschlossene Fläche F, bei welcher er fehlt. Man könnte übrigens durch eine Punktierung von F erreichen, daß F offen wird mit dem ausgeschlossenen Punkt als Rand γ.) Im Anschluß an die Terminologie von Nr. 6 könnte man in diesem Fall die Fläche F oder ihren Rand γ „singulär" nennen, denn es wird sich zeigen, daß die Bedingung (6) für die Fläche F dann und nur dann gilt, wenn jedes Jordangebiet auf F singulär gemäß der Definition von Nr. 6 ist.

Es ist bekannt und leicht zu beweisen, daß alle nullberandeten (vgl. Nr. 6) Flächen F singulär sind: Die Konstanten sind die einzigen eindeutigen, beschränkten, harmonischen Funktionen auf einer solchen Fläche. Ob es weitere singuläre Flächen gibt, ist, wie schon bemerkt wurde, eine offene Frage.[7a])

---

7) Vgl. meine Note: Sur l'existence de certaines classes de différentielles analytiques, *Comptes Rendus Acad. Sci. Paris,* **228** (1949), S. 2002–2004.

7a) *Zusatz bei der Korrektur:* Durch das in Nr. 6 erwähnte Beispiel von Ahlfors ist die Existenz solcher singulärer Flächen sichergestellt.

Jedenfalls kann man behaupten, daß eine positivberandete (nicht nullberandete) Fläche F im Allgemeinen nicht singulär ist. Dies ist z. B. immer dann der Fall, wenn die Fläche durch einen Komplex in zwei nichtkompakte zusammenhängende Jordangebiete F_1 und F_2 zerlegbar ist, so daß die harmonischen Maße der entsprechenden idealen Randteile γ_1 und γ_2 (in Bezug auf F_1 bzw. F_2) beide positiv sind, was z. B. für eine positivberandete Fläche mit endlichem Geschlecht stets möglich ist. Auf diese Frage, auf welche ich in einer bald erscheinenden Arbeit näher eingegangen bin, kommen wir im Laufe der nachfolgenden Untersuchungen noch zurück.

13. Hierdurch wird die Beziehung unseres allgemeinen Problems zu der klassischen Fragestellung von NEUMANN klargelegt. Das Neumannsche Problem ordnet sich in den Fall der singulären Flächen ein. Denn bei ihm wurde die Geschlossenheit von F vorausgesetzt, der Rand γ fehlt also, und die Fläche ist trivialerweise singulär.

14. Zusatzbedingung für die Lösung des Schwarz—Neumannschen Problems. Um die Beziehungen des allgemeinen Problems von Nr. 9 zu der von Schwarz mit seinem alternierenden Verfahren behandelten Randwertaufgabe aufzuklären, ist es nötig, den Lösungen jenes Problems eine weitere Bedingung aufzuerlegen.

Wir kommen zu dieser Bedingung auf natürliche Weise, wenn wir zuerst den Fall betrachten, wo das eine der im Problem von Nr. 9 erwähnten Jordangebiete A und B, z. B. A entweder kompakt ist oder einen idealen Randteil $\bar{\alpha}$ vom harmonischen Maß Null hat. Das bedeutet m. a. W., daß

$$\int_{\alpha} d\omega_\alpha \equiv 1. \tag{7}$$

Nach Nr. 6 ist dann, da $f-a$ in A eindeutig, harmonisch und beschränkt ist,

$$f(z)-a(z)=\int_{\alpha}\{f(\zeta)-a(\zeta)\}\,d\omega_\alpha(\zeta, z) \tag{8}$$

in jedem Punkt z von A. Entsprechend ist in B

$$f(z)-b(z)=\int_{\beta}\{f(\zeta)-b(\zeta)\}\,d\omega_\beta(\zeta, z), \tag{8'}$$

falls

$$\int_{\beta} d\omega_\beta \equiv 1. \tag{7'}$$

Dies gilt also für *jede* Lösung f des Problems (es ist zu bemerken, daß es auch für nichtsinguläre Flächen F Konfigurationen A, B gibt, für welche (7) und (7') in Kraft sind, und dann gibt es ja unendlich viele Lösungsdifferentiale df.[8])

[8]) Die Gebiete A und B sind hingegen unter den Bedingungen (7) und (7') stets singulär (Nr. 6.).

15. Gehen wir nun zu dem Fall über, wo die Bedingungen (7) und (7′) *nicht* gelten. Sei z. B.

$$\int_{\alpha} d\omega_\alpha < 1$$

in A. Das bedeutet, daß der ideale Randteil $\bar{\alpha}$ *positives* harmonisches Maß in Bezug auf A hat.

Sei nun wieder f eine Lösung des Problems Dann wird die Bedingung (8) *nicht* mehr allgemein gelten. Man wird aber natürlich zu diesem enger abgegrenzten Problem geführt:

Es sollen diejenigen Lösungen f des Problems von Nr. 10 bestimmt werden, für welche die Zusatzbedingungen

$$f-a=\int_{\alpha}(f-a)\,d\omega_\alpha \quad \text{in } A, \tag{7}$$

$$f-b=\int_{\beta}(f-a)\,d\omega_\beta \quad \text{in } B \tag{7'}$$

gelten.

16. Wollen wir nun sehen, wie diese Normierung, falls sie überhaupt erfüllbar ist, die Menge der Lösungen (5) einschränkt.

Sei also jetzt f_0 eine Lösung des Problems, welche (7) und (7′) befriedigt. Der allgemeine Ausdruck, ohne die Zusatzbedingungen (7) und (7′), war

$$f=f_0+u, \tag{9}$$

wo u eine Funktion E ist (sie ist eindeutig, beschränkt und harmonisch auf der Fläche F). Soll nun f auch noch die Zusatzbedingungen erfüllen, so muß u den Bedingungen

$$\int_{\alpha}(f_0+u-a)\,d\omega_\alpha=f_0+u-a \quad \text{in } A$$

$$\int_{\beta}(f_0+u-b)\,d\omega_\beta=f_0+u-b \quad \text{in } B$$

genügen, oder, da f_0 jene Bedingungen befriedigt,

$$u=\int_{\alpha} u\,d\omega_\alpha \text{ in } A, \quad u=\int_{\beta} u\,d\omega_\beta \text{ in } B. \tag{9'}$$

Diese Bedingungen sind notwendig und, wie man sofort sieht, auch hinreichend, damit $f=f_0+u$ die Zusatzbedingungen erfüllt.

Falls nun

$$\int_{\alpha} d\omega_\alpha=\int_{\beta} d\omega_\beta \equiv 1,$$

oder, m. a. W., falls die idealen Randteile $\bar{\alpha}$ und $\bar{\beta}$ die harmonischen Maße Null (in Bezug auf A bzw. B) haben, so ist (9′) automatisch erfüllt für jedes

u der Klasse E, und die Bedingungen (7) und (7') bedeuten keine Einschränkung, was schon oben bemerkt wurde.

Wenn das eine Maß, etwa $\omega(z, \overline{\alpha}) > 0$, während das andere $\omega(z, \overline{\beta}) = 0$, so ist die zweite Bedingung (9') ohne weiteres in Kraft. Die erste Bedingung (9') bedeutet aber eine wesentliche Einschränkung für u, und dies gilt umsomehr für die Bedingungen (9'), falls beide Maße $\omega(z, \overline{\alpha})$ und $\omega(z, \overline{\beta})$ positiv sind.

17. Zusammenhang mit dem Schwarzschen Problem. Um die Natur der durch die Zusatzbedingung eingeführten Einschränkung besser verständlich zu machen, wollen wir wie in Nr. 8 für einen Augenblick voraussetzen, daß z. B. das Gebiet A fortsetzbar sei, so daß $\overline{\alpha}$ (oder ein Teil von $\overline{\alpha}$) als ein Jordanbogen $\overline{\alpha}^*$ auf einer umfassenderen Fläche A^* darstellbar ist. Dies setzt voraus, daß $\omega(z, \overline{\alpha}) > 0$. Nach Nr. 8 bedeutet dann die Normierung, daß die Funktion $f - a$, welche in A eindeutig beschränkt und harmonisch ist, auf dem Randteil $\overline{\alpha}^*$ noch stetig ist und dort verschwindet. Diese Bedingungen sind aber für eine beliebige Lösung f des Problems (ohne Normierung) i. A. nicht in Kraft.

Der Sinn der Bedingung (9') ist entsprechend auch der, daß u auf $\overline{\alpha}_*$ stetig gleich Null wird[9]).

18. Nun wollen wir speziell annehmen, die ganze Fläche F sei auf eine Fläche F^* fortsetzbar, so daß die Ränder $\overline{\alpha}$ und $\overline{\beta}$ z. B. eine Darstellung als gewisse Jordankomplexe $\overline{\alpha}^*$ und $\overline{\beta}^*$ auf F^* erhalten, welche einen Teil der ganzen Berandung γ^* von F auf F^* ausmachen.

Das *Schwarzsche Problem* fordert die Lösung der Randwertaufgabe für $F = A + B$, falls die Aufgabe für A und für B als lösbar vorausgesetzt wird. Geben wir uns dementsprechend eine beliebige integrable z. B. stetige Randwertfolge φ auf $\overline{\alpha}^* + \overline{\beta}^*$ und nehmen wir an, es gebe zwei Potentialfunktionen a und b, die in A bzw. B regulär und beschränkt sind und auf $\overline{\alpha}^*$ bzw. $\overline{\beta}^*$ die gegebenen Randwerte φ annehmen. Dann folgt aus Nr. 17, daß das Problem aus Nr. 10 mit der Zusatzbedingung genau mit der Schwarzschen Aufgabe übereinstimmt: Jede Lösung f unseres Problems ist auf F harmonisch, eindeutig und beschränkt und nimmt die gegebenen Randwerte φ auf $\overline{\alpha}^* + \overline{\beta}^*$ an.

19. Notwendige Bedingung für *a* und *b*. Die letzten Betrachtungen zeigen schon, daß die Erfüllbarkeit der Normierung (7) und (7') in manchen Fällen die Einführung einer zusätzlichen Bedingung für die gegebenen Funktionen a und b impliziert. Nehmen wir als ein sehr einfaches Beispiel den

---

[9]) Nach der Bemerkung am Schluß von Nr. 8 kann man, auch wenn die genannte Fortsetzung der Flächen A und B über $\overline{\alpha}$ und $\overline{\beta}$ nicht möglich ist, immer noch behaupten, daß die Zusatzbedingung äquivalent mit der Forderung ist, daß die Funktion $f - a$ auf dem idealen Randteil $\overline{\alpha}$ (bzw. $f - b$ auf $\overline{\beta}$) verschwindet, allerdings nur „fast überall", in einem zu präzisierenden Sinne.

Fall, wo F das Innere eines von einer ebenen Jordankurve γ begrenzten Gebietes der z-Ebene ist, und wählen wir die Teilgebiete A und B $(A+B=F)$ so, daß sie von zwei noch auf γ stetigen Querschnitten α bzw. β begrenzt werden. Die „idealen" Randteile $\bar{\alpha}$ und $\bar{\beta}$ sind zwei Teilbogen von γ und es möge der Durchschnitt $\bar{\alpha}\bar{\beta}$ nicht aus zwei Punkten, sondern aus zwei Teilbögen von γ zusammengesetzt sein, ein Fall, der durch unsere sehr allgemeinen Voraussetzungen nicht ausgeschlossen wird. Da nun die Bedingungen (7) und (7′) das Verschwinden von $f-a$ und $f-b$ auf $\bar{\alpha}\bar{\beta}$ fordern, so muß also sein

$$a=b \text{ auf } \bar{\alpha}\bar{\beta},$$

eine Bedingung, die überflüssig wäre, wenn $\bar{\alpha}\bar{\beta}$ punkthaft ist.

Um solche vom Standpunkt der Anwendungen unbequeme Voraussetzungen zu vermeiden, wollen wir Fälle, wie den oben betrachteten, ausschließen, indem wir die folgende, die Konfiguration (A, B, F) betreffende Bedingung einführen:

Das harmonische Maß des idealen Randteiles $\bar{\alpha}\bar{\beta}$ von AB (in Bezug auf AB) ist gleich Null.

Dann spielt das Verhalten von a und b in der Nähe von $\bar{\alpha}\bar{\beta}$ überhaupt keine Rolle und es wird nicht nötig sein, zusätzliche Bedingungen über das Verhalten dieser Funktionen einzuführen.

20. Beispiel. Um die obigen Zusammenhänge zu beleuchten, betrachten wir den möglichst einfachen Fall, wo F der Einheitskreis $|z|<1$ ist, der offensichtlich eine nichtsinguläre Fläche darstellt. Dann reduziert sich die lineare Mannigfaltigkeit der Differentiale du der Klasse E nicht auf Null.

Als Komplex α nehme man einen Querschnitt von F, erklärt durch zwei Gleichungen $(\log z = s+it)$:

$$(\alpha) \qquad t=\varphi(s), \quad t=\varphi(s)+\pi,$$

wo $\varphi(s)$ eine beliebige für $-\infty \leqq s<0$ eindeutige und stetige Funktion ist. Das Jordangebiet A sei durch

$$(A) \qquad \varphi(s)<t<\varphi(s)+\pi$$

gegeben.

Um B zu erklären, wähle man eine beliebige Zahl $s_0<0$ und nehme eine beliebige, für $s_0 \leqq s<0$ eindeutige stetige Funktion $\psi_1(s)$, so daß $0<\psi_1(s)<\pi$, ferner eine ebenfalls für $s_0 \leqq s<0$ eindeutige stetige Funktion $\psi_2(s)$, die für $s=s_0$ gleich $\psi_1(s_0)$ ist und für $s_0<s<0$ im Intervall $\psi_1(s)<\psi_2(s)<\pi$ liegt. Der Komplex β wird durch

$$(\beta) \qquad t=\varphi(s)+\psi_1(s), \quad t=\varphi(s)+\psi_2(s) \qquad (s_0 \leqq s<0),$$

und B als das Komplement der Punktmenge

$$(\bar{B}) \qquad \varphi(s)+\psi_1(s) \leqq t \leqq \varphi(s)+\psi_2(s)$$

definiert.

Man betrachte nun die Menge der Häufungspunkte γ_α von α auf der Peripherie $|z|=1$. Sie besteht aus 1⁰) zwei isolierten Punkten oder 2⁰) zwei getrennten Bögen von der Länge $<\pi$ oder 3⁰) der ganzen Peripherie $|z|=1$.

In den Fällen 1⁰ und 2⁰ ist das harmonische Maß $\omega(z, \bar{\alpha})$ des idealen Randteiles $\bar{\alpha}$, der jetzt einen durch einen freien Teilbogen der Kreisperipherie $|z|=1$ dargestellten Teil enhält, positiv. Im Falle 3⁰ ist hingegen $\omega(z, \bar{\alpha})=0$, was unmittelbar aus dem Fundamentalsatz über die Ränderzuordnung bei konformer Abbildung von einfachzusammenhängenden schlichten Jordangebieten (Satz von CARATHÉODORY) folgt.

Für das Gebiet B gilt entsprechendes. Tritt 1⁰ oder 2⁰ für A ein, so kann man in beiden Fällen nach obigen Vorschriften B stets so wählen, daß entweder 1⁰ oder 2⁰ für B gilt. Hingegen wird der Fall 3⁰ stets gleichzeitig für beide Gebiete A und B eintreten.

Auf Grund dieser Diskussion gehen wir zum Schwarz-Neumannschen Problem über. Ein aufschlußreiches Beispiel erhält man, wenn man $A_0=B_0=AB$ wählt (was wegen des Zusammenhanges von AB erlaubt ist), und für a und b eine beliebige Funktion nimmt,

$$a=b,$$

die in AB eindeutig, harmonisch und beschränkt ist. Das Problem von Nr. 9 hat dann offenbar $f=a=b$ als Partikulärlösung und die allgemeine Lösung wird somit

$$f=a+u,$$

wo u eine beliebige Funktion der Klasse E ist. Das Problem ist also *in hohem Grade unbestimmt.*

Führt man nun die Normierung von Nr. 15 ein, so wird im Fall 3⁰ wo beide Gebiete A und B einen „Nullrand" haben $(\omega(z, \bar{\alpha})=\omega(z, \bar{\beta})=0)$, diese Bedingung keine weitere Einschränkung bedeuten, und die allgemeine Lösung wird *nicht beeinflußt.* Im Fall 2⁰ schalten sich dagegen diejenigen u aus, die auf dem zu $\bar{\alpha}+\bar{\beta}$ komplementären Teil der Peripherie nicht verschwinden. Im Fall 1⁰ wird die Lösung eindeutig, denn $u\equiv 0$.

§ 3. Die assoziierte Integralgleichung.

21. Notwendige Bedingung für die Lösbarkait des Schwarz—Neumannschen Problems. Angenommen, daß das durch die Normierung von Nr. 15 eingeschränkte Problem von Nr. 10 eine Lösung $f(z)$ hat, gelten für die Potentialfunktionen

$$f-a=u, \quad f-b=v, \tag{10}$$

welche in A bzw. B eindeutig, regulär und beschränkt sind, die Darstellungen

$$u(z)=\int_\alpha u(y)\, d\omega_\alpha(y, z), \quad v(x)=\int_\beta v(z)\, d\omega_\beta(z, x),$$

wobei z in A, x in B liegt.

Nimmt man z auf β, so wird

$$v(z) = f - b = u + a - b = \int_\alpha u(y)\, d\omega_\alpha(y, z) + a - b$$

und daher

$$v(x) = u(x) + a(x) - b(x) =$$
$$= \int_\beta \left(\int_\alpha u(y)\, d\omega_\alpha(y, z)\right) d\omega_\beta(z, x) + \int_\beta \{a(z) - b(z)\}\, d\omega_\beta(z, x),$$

also für x auf α

(11) $$u(x) = \int_\alpha u(y)\, d\varphi(y, x) + u_0(x),$$

wo

(12) $$u_0(x) = \int_\beta \{a(z) - b(z)\}\, d\omega_\beta(z, x) - \{a(x) - b(x)\}$$

und

(13) $$d\varphi(y, x) = d\int_\beta \omega_\alpha(y, z)\, d\omega_\beta(z, x).$$

Es ist also u_0 gleich der Differenz von $b - a$ und derjenigen *normierten* Potentialfunktion, welche durch die Randwerte $b - a$ auf β in B bestimmt ist.

Man lasse den Punkt y einmal den ganzen (kompakten oder nichtkompakten) Randkomplex α beschreiben. Dabei ist $d\varphi(y, x)$ nicht negativ, und die totale Variation

(14) $$\int_\alpha d\varphi(y, x) \leqq 1,$$

da das harmonische Maß des ganzen Komplexes α für z auf $\beta \leqq 1$ ist (vgl. 13) und dasselbe auch für das harmonische Maß des ganzen Komplexes β in B, also speziell auf α gilt. Hieraus folgt:

In (14) steht das Gleichheitszeichen dann und nur dann, wenn die idealen Randteile $\bar{\alpha}$ bzw. $\bar{\beta}$ das harmonische Maß Null in Bezug auf A bzw. B haben.

Diese spezielle Bedingung ist sicher dann erfüllt, falls die ganze Fläche $F = A + B$ nullberandet ist, kann aber, wie aus dem Beispiel von Nr. 20 folgt, auch für positivberandete Flächen F eintreffen.

Es ist so hervorgegangen:

Eine notwendige Bedingung dafür, daß f eine Lösung des Problems ist, ist, daß die Funktion $u = f - a$ auf α der Integralgleichung (11) *genügt.*

22. Hinreichende Bedingung. Umgekehrt ist die Lösbarkeit der Integralgleichung (11) auch für die Lösung des gestellten Problems hinreichend. Die stetigen und beschränkten Lösungen u der Integralgleichung (11) und die Lösungen f des Problems entsprechen einander eineindeutig und zwar durch die Formel (z in A)

$$f(z) = a(z) + \int_{\alpha} u(x)\, d\omega_{\alpha}(x, z). \tag{15}$$

Die harmonische Fortsetzung von $f - b$ in B wird gegeben durch das Integral

$$\int_{\beta} (f(y) - b(y))\, d\omega_{\beta}(y, z).$$

Es genügt hierzu zu zeigen, daß das letzte Integral in AB gleich $f(z) - b(z)$ ist, wobei f die in (15) definierte Funktion ist, was mit Hilfe des Maximumprinzips leicht zu beweisen ist. Wir verweisen auf unseren Beweis, loc. cit. (Einleitung), der fast wörtlich in dem jetzt vorliegenden allgemeinen Fall wiederholt werden kann.

23. Über die Lösung der Integralgleichung. Wir machen hier auf gewisse Fälle aufmerksam, bei der die Lösung der Integralgleichung leicht konstruiert werden kann.

1°. Die obere Grenze von

$$\int_{\alpha} d\varphi\,(y, x) = \theta(x) \leqq 1$$

auf α ist kleiner als 1 $(0 < \theta(x) < q < 1)$.

Dann sieht man sofort ein, daß die Integralgleichung (11) keine Eigenlösung hat, und das Problem ist ohne irgendwelche Zusatzbedingungen für a und b stets lösbar.

Zwei für die Anwendungen wichtige Fälle, wo diese Bedingungen $0 < \theta < q$ offensichtlich erfüllt sind, sind die fo genden:

1. Das Durchschnittsgebiet AB ist kompakt und das harmonische Maß von mindestens einem der idealen Randteile $\bar{\alpha}$ und $\bar{\beta}$ ist positiv.

2. Das Durchschnittsgebiet AB ist nichtkompakt, der Randteil $\bar{\alpha}$ (oder $\bar{\beta}$), hat positives harmonisches Maß, und das Durchschnittsgebiet AB enthält die Punktmenge (z), wofür

$$q \leqq \int_{\alpha} d\omega_{\alpha}(x, z) < 1.$$

Dies ist die klassische Bedingung von Schwarz in etwas verallgemeinerter Form.

2°. AB ist nicht kompakt und

$$\theta(x) < 1, \quad \text{aber} \quad \text{fin sup}\, \theta = 1.$$

Dann können Eigenlösungen vorkommen, und es gibt Konfigurationen (F, A, B), bei denen sogar die Menge der *beschränkten* Eigenlösungen enorm mächtig wird. Dies zeigt schon das Beispiel von Nr. 20, Fall 2°. Betrachtet man nämlich eine beliebige für $|z| < 1$ beschränkte Potentialfunktion f, die auf den „freien" idealen Randteilen $\bar{\alpha}$ und $\bar{\beta}$ von A bzw. B verschwindet, auf dem komplementären Randteil (der positives Maß hat) hingegen ganz beliebige Werte annimmt, so wähle man $a \equiv b \equiv 0$ in AB[10]). f ist dann eine Lösung des Problems und genügt somit, da $u_0 \equiv 0$, der homogenen Integralgleichung

$$f(x) = \int f(y)\, d\varphi(y, x),$$

womit die Behauptung bewiesen ist. Die Erklärung dieser zunächst etwas paradox erscheinenden Tatsache ist darin zu finden, daß im vorliegenden Fall die monotone Funktion $\varphi(y, x)$, die allerdings auf α eine beliebig oft differenzierbare Funktion ihrer Argumente ist (z. B. nach der Bogenlänge s), in der Nähe des idealen Randes kompliziert variiert. Die erste Ableitung von φ nach s wird so stark und unregelmäßig ins Unendliche wachsen, daß die klassische Theorie der Integralgleichungen versagt.

Trotzdem läßt sich auch bei solchen Komplikationen direkt zeigen, daß die Integralgleichung (und das gesamte Problem) lösbar ist unter sehr allgemeinen Voraussetzungen. Dies ist z. B. immer dann der Fall, wenn die gegebenen Funktionen a und b als in ganz A bzw. B beschränkte reguläre Funktionen gegeben sind, ein Fall, der für die Anwendungen wichtig ist. Die allgemeine Lösung wird aber in manchen Fällen dann in hohem Maße unbestimmt bleiben, wie das obige Beispiel schon zeigt.

3°. Es ist

$$\int_{\alpha} d\varphi(y, x) = \theta(x) \equiv 1.$$

Dann hat die Integralgleichung mindestens jede Konstante als Eigenlösung und die Existenz der Lösungen der Gleichung mit $u_0 \neq 0$ fordert dann schon im Falle, wo die Integralgleichung nicht schwer singulär ist, jedenfalls, daß gewisse Orthogonalitätsbedingungen erfüllt sind.

Ein besonders einfacher Fall ergibt sich beim klassischen Problem von Neumann, wo also das Gebiet AB kompakt ist. Dann sind die Konstanten die einzigen Eigenlösungen. Die Orthogonalitätsbedingung, welche für die Lösbarkeit des Problems erforderlich ist, reduziert sich dann (vgl. loc. cit.) auf die Bedingung, daß die konjugierte Potentialfunktion zu $a - b$ im Gebiet $A_0 + B_0$ eindeutig ist. Das ist gerade die klassische Bedingung von Neumann.

Schwer singuläre Fälle können hingegen wieder bei nichtkompakten Durchschnitten AB vorkommen. Das Beispiel von Nr. 20, Fall 3°, beleuchtet die Komplikationen, die hier möglich sind. Für $a \equiv b$ gibt jede beliebige für $|z| < 1$ reguläre, beschränkte Potentialfunktion eine Eigenlösung.

(Eingegangen am 27. Dezember 1949.)

10) Der ideale Randteil von AB hat das harmonische Maß Null in Bezug auf AB.